Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Baustatik
Leiter: Prof. Dr.-Ing.
S. Freitag

Einfluss der Theorie II. Ordnung auf das Eigenschwingungsverhalten von 2D-Stabtragwerken

Felix Schmid

1. Motivation und Ziele

Die Eigenfrequenzen von Stabtragwerken sind abhängig von den physikalischen Eigenschaften der einzelnen Stäbe wie ihrer Masse und ihrer Steifigkeit. Dabei ist die Eigenfrequenz prinzipiell als charakteristische Eigenschaft des Systems zu betrachten, welche unabhängig von externen Kräften ist. Diese Unabhängigkeit gilt nicht mehr bei einer Berechnung nach Theorie II. Ordnung, bei der zusätzlich die Stablängskräfte die Steifigkeit des Systems beeinflussen und somit zu anderen Eigenfrequenzen führen. Da abgesehen vom Abschnitt 4.4.2.2 der Norm EN1888-1 (Erdbebenbemessung) im Eurocode keine Regelung zur Berücksichtigung der Theorie II. Ordnung in Bezug auf die Berechnung von Eigenfrequenzen enthalten ist, soll im Rahmen dieser Arbeit unter Verwendung der Finite-Elemente-Methode untersucht werden, inwiefern ein Einfluss dieser Theorie zu bemerken ist.

2. Umsetzung innerhalb der FEM

In Matrixschreibweise lässt sich die semidiskrete Bewegungsgleichung des Stabtragwerkes wie folgt formulieren

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{K}\mathbf{V} = 0.$$

Das Einsetzen eines Ansatzes, der die homogene Differenzialgleichung erfüllt, führt auf das lineare Gleichungssystem

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\,\boldsymbol{\varphi}(x) = 0,$$

deren nichttriviale Lösungen über die folgende notwendige und hinreichende Bedingung bestimmt werden können

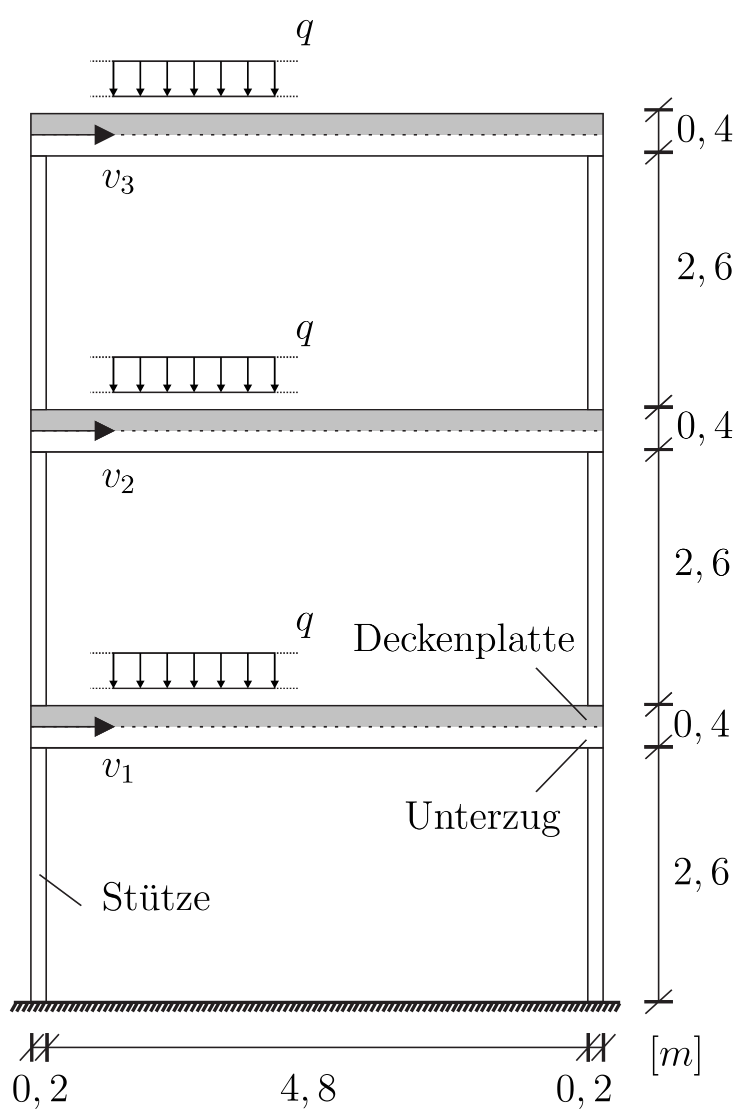
$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0.$$

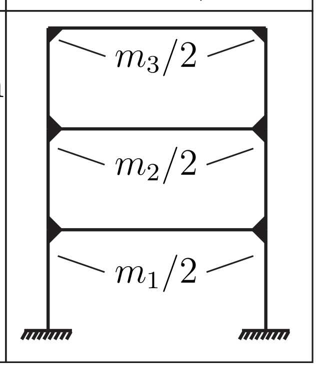
$\mathbf{K}_L$ linear Theorie I. Ordnung

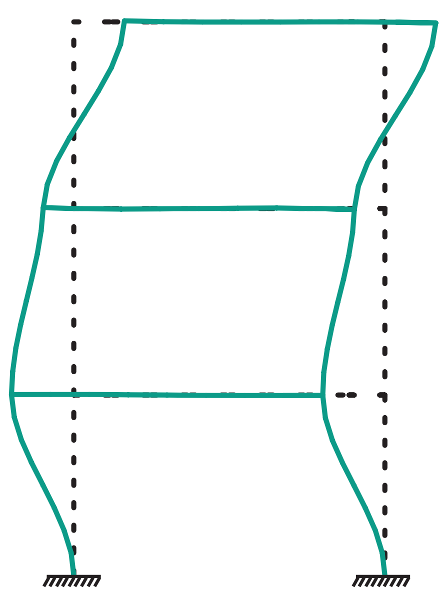
$\mathbf{K}_{II}$ nichtlinear Theorie II. Ordnung

Die Eigenkreisfrequenzen ω_i des Stabtragwerks werden aus der Wurzel der Eigenwerte ω_i^2 erhalten; zur Berechnung der Eigenfrequenzen werden die Eigenkreisfrequenzen durch 2π geteilt. Somit sind die Eigenkreisfrequenzen von der Steifigkeitsmatrix **K** und der Massenmatrix **M** abhängig. An dieser Stelle können nun die lineare Steifigkeitsmatrix nach Theorie I. Ordnung oder die nichtlineare Steifigkeitsmatrix nach Theorie II. Ordnung verwendet und die errechneten Eigenfrequenzen miteinander verglichen werden. Die Massenverteilung kann über die kontinuierliche Massenmatrix oder vereinfacht über die Lumped Massenmatrix erfasst werden.

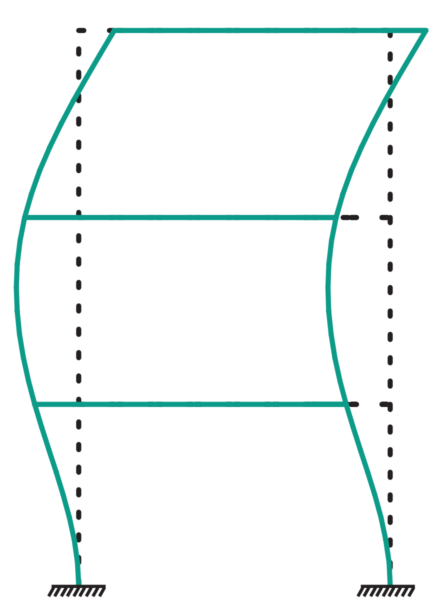
3. Beispiel Stockwerkrahmen



Lichter Abstand zwischen den Rahmen	$3\,m$
Maße Stützen $(b \times h)$	$0,2 \times 0,2\,m^2$
Maße Unterzug $(b \times h)$	$0,2 \times 0,2\,m^2$
Maße Decke $(b \times h)$	$3,2 \times 0,2\,m^2$
E-Modul	$25,9 \cdot 10^5 kN/m^2$
Wichte	$25 kN/m^3$
30 % Nutzlast q	$0,3 \cdot 2kN/m^2 = 0,6kN/m^2$
Statisches System + Verteilung der Stockwerkmassen m_1, m_2 und m_3	



Zur Berechnung der Eigenkreisfrequenzen des oben abgebildeten Stockwerkrahmens aus Stahlbeton C20/25 wurden die Massen m_1 bis m_3 der Decken samt Unterzug und den darüber liegenden Stützen erfasst und als Punktmassen auf die Rahmenecken aufgeteilt. Der E-Modul wurde zur Berücksichtigung der Rissbildung auf 90% reduziert. Die Decken und Unterzüge lassen sich zu Riegeln mit einem Flächenträgheitsmoment von $I = 3,76 \cdot 10^{-3} m^4$ zusammenfassen.



Als Variation des Beispiels wurde ein gelenkiger Anschluss der Plattenbalken angenommen, sodass diese zwischen den durchlaufenden Stützen eingehängt sind, und das System damit weicher wird. Oben links ist die zweite Eigenform des harten Stockwerkrahmens zu sehen, unten rechts ist die zweite Eigenform des weichen Stockwerkrahmens. In der Tabelle sind die berechneten Eigenkreisfrequenzen in $[1/s]$ und die dazugehörige prozentuale Abnahme im Übergang von der Theorie I. Ordnung auf die Theorie II. Ordnung aufgeführt.

ω_i	hart			weich		
	T1O	T2O	Abnahme	T1O	T2O	Abnahme
ω_1	7,54	7,42	1,6 %	1,48	0,838	43,4 %
ω_2	21,2	20,9	1,4%	9,64	9,17	4,9 %