Karlsruher Institut für Technologie

BAUSTATIK

Institut für Baustatik
Leiter: Prof. Dr.-Ing.
S. Freitag

Theorie und Numerik stochastischer Eigenwertprobleme im Rahmen der Strukturanalyse

Eszter Anna Kósa

1. Motivation und Ziele

Stabilitätsprobleme von Bauteilen, wie das Knicken, müssen bei der Bemessung statischer Systeme beachtet werden. Im Rahmen einer stochastischen Strukturanalyse wird der Einfluss unscharfer Materialparameter auf die Stabilitätslast untersucht. Hierbei kommt oft die rechenintensive Monte-Carlo-Simulation (MCS) in Kombination mit der FEM zum Einsatz. In dieser Arbeit wird als Alternative zur MCS die polynomielle Chaosentwicklung (PCE) verwendet.

2. Eigenwertprobleme und Stabilitätsanalyse

Eigenwertaufgaben kommen unter anderem bei der Berechnung von Stabilitätslasten vor. Hierzu muss das Eigenwertproblem (EWP)

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \text{oder} \quad (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{B})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

gelöst werden. Unter Verwendung der Vektoriteration kann der größte bzw. der kleinste Eigenvektor $\boldsymbol{x}$ eines linearen, homogenen Gleichungssystems bestimmt werden. Die Von-Mises-Iteration konvergiert durch $\boldsymbol{u}^{(k)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k-1)}$ zum größten Eigenvektor, während die Inverse Iteration zum kleinsten Eigenvektor führt. Dabei wird die Inverse von $\boldsymbol{A}$ verwendet. Anschließend kann der größte bzw. der kleinste Eigenwert $\lambda^{(k)}$ mit dem Rayleigh-Quotienten berechnet werden

$$\lambda^{(k)} = \frac{\boldsymbol{x}^{(k)T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k)}}{\boldsymbol{x}^{(k)T}\boldsymbol{x}^{(k)}} \quad \text{oder} \quad \lambda^{(k)} = \frac{\boldsymbol{x}^{(k)T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k)}}{\boldsymbol{x}^{(k)T}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)}}\ .$$

Ein Stabilitätsproblem in der Statik tritt auf, wenn ein System durch eine kritische Last (F_{krit}) instabil wird und in einem infinitesimal benachbarten, stabilen Nachbarzustand (N) verbleibt, statt in den ursprünglichen Zustand (G) zurückzukehren. Im Rahmen der FEM kann sowohl das lineare als auch das nichtlineare EWP für eine Stabilitätsuntersuchung formuliert werden

$$(\boldsymbol{K}_L + \Lambda \boldsymbol{K}_{NL})\,\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{0} \quad \text{bzw.} \quad (\boldsymbol{K}_T - \omega \boldsymbol{1})\,\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{0}.$$

Für das lineare EWP wird die tangentiale Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_T$ in lastunabhängige ($\boldsymbol{K}_L$) und lastabhängige ($\boldsymbol{K}_{NL}$) Anteile zerlegt. Der Stabilitätspunkt ist erreicht, wenn der Laststeigerungsfaktor $\Lambda = 1$ oder der Eigenwert $\omega = 0$ erreicht ist. Um den Eigenwert $\Lambda = 1$ für das lineare EWP finden zu können, muss im Rahmen der inversen Iteration ein sogenannter Shift vorgenommen werden.

3. Diskretisierung stochastischer Größen

In dieser Arbeit wird die PCE verwendet, um die unscharfen Materialparameter zu approximieren, indem Zufallsvariablen a durch orthonormale Polynome Ψ_k dargestellt und die Expansionskoeffizienten a_k berechnet werden

$$a \approx \hat{a} = \sum_{k=0}^{P} a_k \Psi_k = a_0\Psi_0 + a_1\Psi_1 + a_2\Psi_2 + \ldots + a_P\Psi_P\ .$$

Mithilfe dieser Methode kann die Berechnung des Stabilitätsproblems mit materieller Unschärfe durchgeführt und stochastische Momente effizienter im Vergleich zur MCS erhalten werden. Darüber hinaus kann die PCE als Ersatzmodell anstelle der FEM eingesetzt werden, um mittels Sampling (MCS) die Verteilung der Traglast zu generieren.

4. Numerisches Beispiel

Ein IPE-Träger, siehe Abbildung 1, wurde im Eulerfall 2 untersucht, wobei der E-Modul als Zufallsfeld modelliert und der Stab mit 10 finiten Elementen diskretisiert wurde. Abbildung 2 zeigt die Verteilung der Traglast, berechnet mit der PCE (Polynomgrad $P = 2$) und der Monte-Carlo-Simulation mit $n_{sim} = 10^4$ Realisierungen.

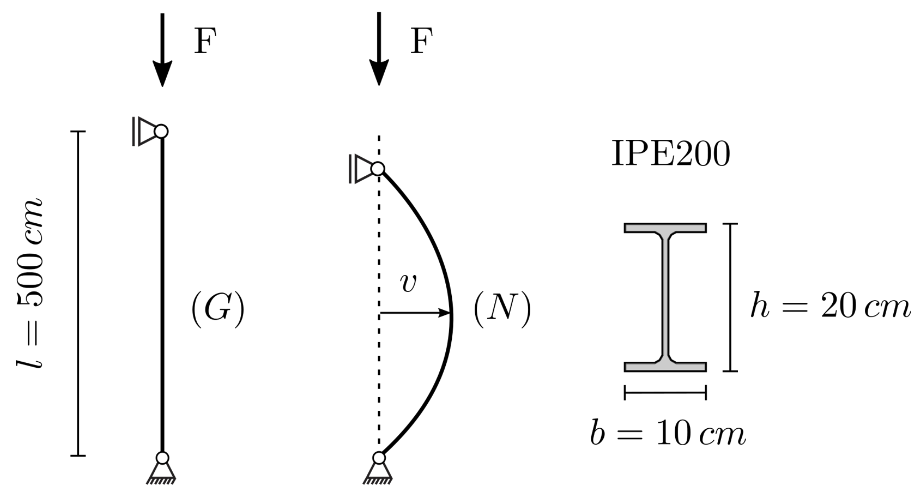

Abbildung 1: *Stabilitätsuntersuchung am Eulerstab*

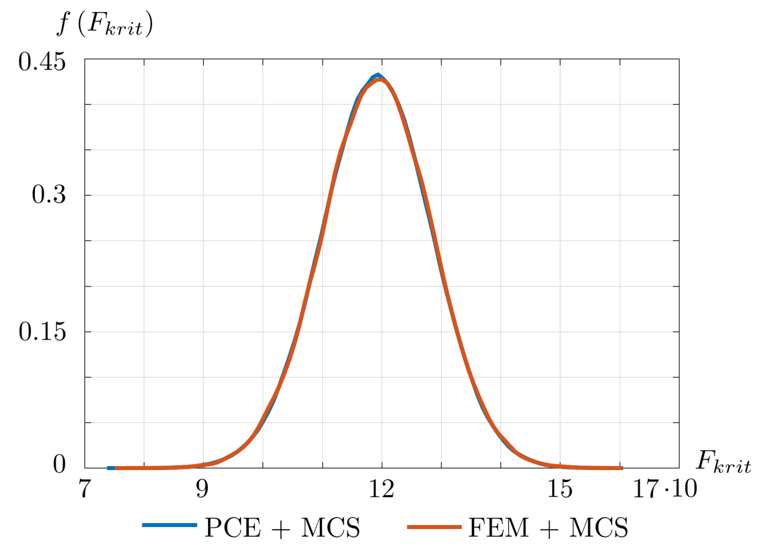

Abbildung 2: *Verteilung der Traglast F_{krit}, für $P = 2$ und $n_{sim} = 10^4$*

Methode	Mittelwert F_{krit}	Standardabweichung
MCS, $n_{sim} = 10^4$	$119.158\,kN$	$9.236\,kN$
PCE, $P = 2$	$119.155\,kN$	$9.251\,kN$

Die PCE gibt stochastische Momente der Traglast wie den Mittelwert und die Standardabweichung direkt aus den PC-Koeffizienten (a_k) wieder. Die Stabilitätsuntersuchung mit materieller Unschärfe motiviert zur Erweiterung der Implementierung für geometrische Imperfektionen.